

<b>Фамилия Имя Отчество</b>	Тихова Ярослава Александровна
Город	Пенза
Место учебы, класс	МБОУ СОШ № 18 г. Пензы
Секция	Математика
Название работы	Свойства НОД и НОК в задачах о покрытии прямоугольника плитками маленьких размеров
<b>Научный руководитель работы</b> Фамилия, Имя, Отчество	Жистина Лилия Фаритовна
Е-mail научного руководителя ( для получения программы секции и ссылки на свидетельства, дипломы и благодарственные письма)	Zamuvr53@gmail.com
Место работы, должность	МБОУ СОШ № 18 г. Пензы

**Министерство просвещения РФ**

Секция: Математика

**Свойства НОД и НОК  
в задачах о покрытии прямоугольника  
плитками маленьких размеров**

Автор работы:  
ученица 7 класса  
МБОУ СОШ № 18 г. Пензы  
Тихова Ярослава Александровна

Место выполнения работы:  
МБОУ СОШ № 18 г. Пензы

Научный руководитель:  
Жистина Л.Ф.

г. Пенза, 2020

## Оглавление

Введение		3
Глава 1.	ПОЛУЧЕНИЕ НОВЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ, ИСПОЛЬЗУЯ СВОЙСТВА НОК И НОД	4
Глава 2.	ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ НОВЫХ ФАКТОВ В РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ	10
Заключение		12
Литература и источники		12

## **Введение**

Решение олимпиадных задач принципиально отличается от решения школьных, даже очень сложных, задач. На выполнение олимпиадного задания отводится строго определенное время, в качестве задач предлагаются не задачи базового или повышенного уровня (по школьным меркам), а задания нестандартные. Эти задания могут быть простыми по формулировке, но выходящими за рамки школьной программы. Участие в олимпиаде по математике является достаточно серьезным испытанием, требующим предварительной подготовки. Кроме повторения стандартных разделов учебной программы отдельное внимание стоит уделить решению специальных олимпиадных заданий.

Тема моей работы актуальная, так как исследуя свойства объекта, изученного на уроках математики, я учусь выявлять закономерности, свойства, использовать факты, находить красивые способы решения нестандартных текстовых задач, приобретаю навыки нахождения оптимальных решений при работе с реальными объектами.

**Цель:** исследовать задачу о покрытии заданного прямоугольника со сторонами  $m \times n$  маленькими плитками размером  $2 \times 3$

### **Задачи:**

- 1) Изучить тему НОК и НОД чисел
- 2) Провести вычислительные эксперименты для установления связи между количеством плиток  $2 \times 3$  и размерами прямоугольника  $m \times n$  используя НОК и НОД
- 3) Выявить закономерность между количеством плиток размером  $2 \times 3$  и сторонами прямоугольника  $m \times n$  используя НОК и НОД

**Гипотеза:** используя НОК и НОД двух чисел, выявим закономерность между количеством плиток размером  $2 \times 3$  и сторонами прямоугольника  $m \times n$ . Ограничимся условием  $2 < n < 20$ ,  $m = n - 1$ .

**Противоречие:** есть свойства НОД и НОК, но это недостаточно для решения нашей проблемы. Поэтому необходимо выявить саму закономерность.

# ГЛАВА 1. ПОЛУЧЕНИЕ НОВЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ, ИСПОЛЬЗУЯ СВОЙСТВА НОК И НОД

## 1.1. Краткая информация о нахождении НОК и НОД двух чисел

Родоначальником наименьшего общего кратного был Евклид (3 в. до н.э.) В своей книге «Начала» он впервые вводит это понятие.

Наименьшим общим кратным (НОК) двух и более натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, которое само делится нацело на каждое из этих чисел.

Данный способ обычно применяется для небольших чисел.

Выписываем в строчку кратные для каждого из чисел, пока не найдётся одинаковое кратное для обоих чисел.

Кратное числа  $a$  обозначим большой буквой «К».

$$K(m) = \{ \dots, \dots \}$$

Пример. Найти НОК 6 и 8.

$$K(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, \dots\}$$

$$K(8) = \{8, 16, 24, 32, \dots\}$$

$$\text{НОК}(6, 8) = 24$$

Рассмотрим способ нахождения НОД. Наибольший общий делитель может быть найден по разложениям чисел на простые множители. Сформулируем правило: НОД двух целых положительных чисел  $m$  и  $n$  равен произведению всех общих простых множителей, находящихся в разложениях чисел  $a$  и  $b$  на простые множители.

Приведем пример для пояснения правила нахождения НОД. Пусть нам известны разложения чисел 220 и 600 на простые множители, они имеют вид  $220=2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$  и  $600=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ . Общими простыми множителями, участвующими в разложении чисел 220 и 600, являются 2, 2 и 5. Следовательно,  $\text{НОД}(220, 600) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ .

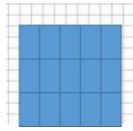
## 1.2. Вычислительный эксперимент используя свойства НОК и НОД

Используя НОК и НОД выявим закономерность между количеством плиток размером  $2 \times 3$  и сторонами прямоугольника  $m \times n$ , если  $2 < n < 20$ ,  $m = n - 1$ . Рассмотрим все случаи.

1) Возьмем прямоугольник со сторонами  $2 \times 3$ . В этот прямоугольник необходимо поместить плитку размером  $2 \times 3$ . Очевидно, что поместится одна плитка.



2) Рассмотрим другой прямоугольник со сторонами  $10 \times 9$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ . Для начала найдем НОД чисел 10 и 9.  $\text{НОД}(10,9) = 1$ . Далее площади плитки.  $S = 2 \cdot 3 = 6$ . Теперь найдем НОК чисел 10 и 9.  $\text{НОК}(10,9) = 90$ . С помощью площади и НОК узнаем сколько можно уложить плиток в прямоугольник  $10 \times 9$ .  $90 : 6 = 15$ . Проверим действительно ли это так. Начертим прямоугольник со сторонами  $10 \times 9$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 15 плиток  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $10 \times 9$ .

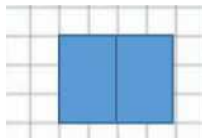


3) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $4 \times 3$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(4,3) = 1$$

$$\text{НОК}(4,3) = 12$$

$$12 : 6 = 2$$



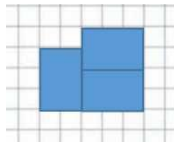
Начертим прямоугольник со сторонами  $4 \times 3$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 2 плитки  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $4 \times 3$ .

4) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $5 \times 4$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(5,4) = 1$$

$$\text{НОК}(5,4) = 20$$

$$20 : 6 = 3,3$$



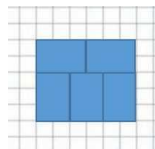
Начертим прямоугольник со сторонами  $5 \times 4$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместились 3 плитки  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $5 \times 4$ .

5) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $6 \times 5$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(6,5) = 1$$

$$\text{НОК}(6,5) = 30$$

$$30 : 6 = 5$$



Начертим прямоугольник со сторонами  $6 \times 5$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 5 плиток  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $6 \times 5$ .

6) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $7 \times 6$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(7,6) = 1$$



$$\text{НОК}(7,6) = 42$$

$$42:6 = 7$$

Начертим прямоугольник со сторонами  $7 \times 6$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 7 плиток  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $7 \times 6$ .

7) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $8 \times 7$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(8,7) = 1$$

$$\text{НОК}(8,7) = 56$$

$$56:6 \approx 9,3 \approx 9$$



Начертим прямоугольник со сторонами  $8 \times 7$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 9 плиток  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $8 \times 7$ .

8) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $9 \times 8$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(9,8) = 1$$

$$\text{НОК}(9,8) = 72$$

$$72:6 = 12$$



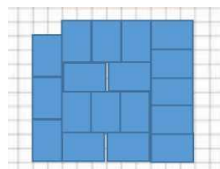
Начертим прямоугольник со сторонами  $9 \times 8$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 12 плиток  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $9 \times 8$ .

9) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $11 \times 10$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(11,10) = 1$$

$$\text{НОК}(11,10) = 110$$

$$110:6 \approx 18,3 \approx 18$$



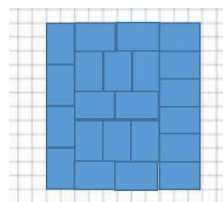
Начертим прямоугольник со сторонами  $11 \times 10$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 18 плиток  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $11 \times 10$ .

10) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $12 \times 11$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(12,11) = 1$$

$$\text{НОК}(12,11) = 132$$

$$132:6 = 22$$



Начертим прямоугольник со сторонами  $12 \times 11$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 22 плитки  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $12 \times 11$ .

11) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $13 \times 12$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(13,12) = 1$$

$$\text{НОК}(13,12) = 156$$

$$156:6 = 26$$

Начертим прямоугольник со сторонами  $13 \times 12$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 26 плиток  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $13 \times 12$ .

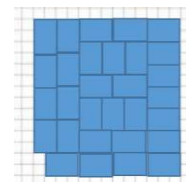
12) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $14 \times 13$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(14,13) = 1$$

$$\text{НОК}(14,13) = 182$$

$$182:6 \approx 30,3 \approx 30$$

Начертим прямоугольник со сторонами  $14 \times 13$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 30 плиток  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $14 \times 13$ .



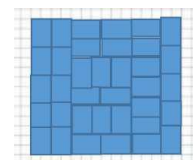
12) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $15 \times 14$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(15,14) = 1$$

$$\text{НОК}(15,14) = 210$$

$$210:6 = 35$$

Начертим прямоугольник со сторонами  $15 \times 14$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 35 плиток  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $15 \times 14$ .



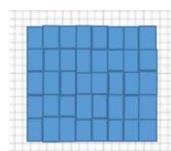
14) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $16 \times 15$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(16,15) = 1$$

$$\text{НОК}(16,15) = 240$$

$$240:6 = 40$$

Начертим прямоугольник со сторонами  $16 \times 15$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 40 плиток  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $16 \times 15$ .



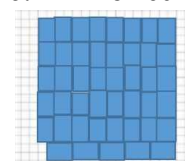
15) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $17 \times 16$ . И поместим в него плитки размером  $2 \times 3$ .

$$\text{НОД}(17,16) = 1$$

$$\text{НОК}(17,16) = 272$$

$$272:6 \approx 45,3 \approx 45$$

Начертим прямоугольник со сторонами  $17 \times 16$  и в нем отметим плитки размером  $2 \times 3$ . Поместилось 45 плиток  $2 \times 3$  в прямоугольнике  $17 \times 16$ .



16) Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $18 \times 17$ . И поместим в него плитки

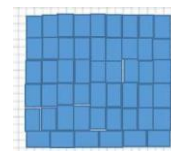


размером 2x3.

$$\text{НОД}(18,17) = 1$$

$$\text{НОК}(18,17) = 306$$

$$306:6 = 51$$



Начертим прямоугольник со сторонами 18x17 и в нем отметим плитки размером 2x3.

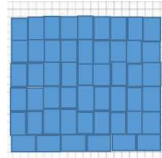
Поместилась 51 плитка 2x3 в прямоугольнике 18x17

17) Рассмотрим прямоугольник со сторонами 19x18. И поместим в него плитки размером 2x3.

$$\text{НОД}(19,18) = 1$$

$$\text{НОК}(19,18) = 342$$

$$342:6 = 57$$



Начертим прямоугольник со сторонами 19x18 и в нем отметим плитки размером 2x3.

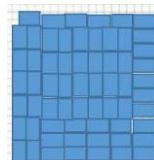
Поместилось 57 плиток 2x3 в прямоугольнике 19x18.

18) Рассмотрим прямоугольник со сторонами 20x19. И поместим в него плитки размером 2x3.

$$\text{НОД}(20,19) = 1$$

$$\text{НОК}(20,19) = 380$$

$$380:6 \approx 63,3 \approx 63$$



Начертим прямоугольник со сторонами 20x19 и в нем отметим плитки размером 2x3.

Поместилось 63 плитки 2x3 в прямоугольнике 20x19.

Все эти данные запишем в таблице.

Таблица 1. Количество плиток 2x3 в прямоугольнике mхn

	Пара чисел (m,n)	НОК (m,n)	Рисунок
<b>1</b>	<b>(3,2)</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>(4,3)</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
3	(5,4)	3,3	3
<b>4</b>	<b>(6,5)</b>	<b>5</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>(7,6)</b>	<b>7</b>	<b>7</b>
6	(8,7)	9,3	9
<b>7</b>	<b>(9,8)</b>	<b>12</b>	<b>12</b>
<b>8</b>	<b>(10,9)</b>	<b>15</b>	<b>15</b>
9	(11,10)	18,3	18
<b>10</b>	<b>(12,11)</b>	<b>22</b>	<b>22</b>
<b>11</b>	<b>(13,12)</b>	<b>26</b>	<b>26</b>
12	(14,13)	30,3	30
<b>13</b>	<b>(15,14)</b>	<b>35</b>	<b>35</b>
<b>14</b>	<b>(16,15)</b>	<b>40</b>	<b>40</b>

15	(17,16)	45,3	45
<b>16</b>	<b>(18,17)</b>	<b>51</b>	<b>51</b>
<b>17</b>	<b>(19,18)</b>	<b>57</b>	<b>57</b>
18	(20,19)	63,3	63

Можно заметить по таблице, что НОК (m,n) и количество плиток по рисунку совпадает в том случае, когда одна из сторон в прямоугольнике кратно 3. А НОК (m, n), который получился не целым числом схож с количеством плиток на рисунке.

**Алгоритм нахождения количество плиток  $a \times b$  в прямоугольнике  $m \times n$ :**

- 1) Убедиться, что  $\text{НОД}(m,n) = 1$
- 2) Найти площадь одной плитки  $S = a \cdot b$ ,
- 3) Найти НОК (m,n)
- 4)  $\text{НОК}(m,n) : S$  - количество плиток в прямоугольнике  $m \times n$ .

## ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ НОВЫХ ФАКТОВ В РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В этой главе приводим несколько задач, решаемые с помощью новых фактов.

**Задача 1.** Лист картона имеет форму прямоугольника, длина которого 48 см, а ширина 35 см. Этот лист надо разрезать на равные прямоугольные плитки размером 12х7 см.

*Какое наибольшее количество прямоугольных плиток можно получить из этого листа?*

Решение:

Используем алгоритм нахождения количество плиток размером  $a \times b$  в прямоугольнике  $m \times n$ :

- 1)  $\text{НОД}(48, 35) = 1$
- 2) Найдем площадь одной плитки  $S = 12 \cdot 7 = 84 \text{ см}^2$
- 3)  $\text{НОК}(48, 35) = 1680$
- 4)  $\text{НОК}(48, 35): S = 1680:84 = 20$  - количество плиток в прямоугольнике  $48 \times 35$ .

Ответ: 20 прямоугольных плиток.

**Задача 2.** Камин в комнате необходимо выложить отделочной плиткой в форме квадрата  $39 \times 39$ .

*Сколько плиток понадобится для камина размером  $385 \times 156 \text{ см}$ ?*

Решение:

- 1)  $\text{НОД}(385, 156) = 1$
- 2)  $S = 39 \cdot 39 = 1521 \text{ см}^2$  - площадь одной плитки
- 3)  $\text{НОК}(385, 156) = 60060$
- 4)  $\text{НОК}(385, 156): S = 60060:1521 = 39,48 \approx 39$  - количество плиток в прямоугольнике  $39 \times 39$ .

**Задача 3.** На садовом участке размером  $27 \times 50 \text{ м}$  необходимо вырыть грядки размером  $1 \times 4 \text{ м}$ .

*Сколько грядок можно вырыть на этом участке?*

Решение:

- 1)  $\text{НОД}(27, 50) = 1$
- 2)  $S = 1 \cdot 4 = 4$  - площадь одной грядки
- 3)  $\text{НОК}(27, 50) = 1350$  - площадь садового участка
- 4)  $\text{НОК}(27, 50): S = 1350:4 = 337,5 \approx 337$  - количество грядок размером  $1 \times 4$  можно вырыть в садовом участке размером  $27 \times 50$ .

Ответ: 337 грядок.

**Задача 4.** Требуется изготовить ящик с прямоугольным дном для укладки коробок размером 3х4 см.

**Сколько таких коробок поместятся в ящик размером 15х16 см, чтобы уместить их в плотную?**

Решение:

1)  $\text{НОД}(15,16) = 1$

2)  $S = 3 \cdot 4 = 12$  - площадь одной коробки

3)  $\text{НОК}(15, 16) = 240$  - площадь ящика

4)  $\text{НОК}(15, 16): S = 240:12 = 20$  - количество коробок размером 3х4 поместится в ящик размером 15х16 см.

Ответ: 20 коробок.

**Задача 5.** Необходимо разместить 23 коробки размером 5х6 см в прямоугольный ящик. Известно, что ширина ящика кратно 5 и 3.

**Какова должна быть наименьшая длина стороны прямоугольного дна ящика, чтобы уместить все коробки?**

Решение:

1) Найдем площадь одной коробки:  $S = 5 \cdot 6 = 30 \text{ см}^2$

2) С помощью площади и количество коробок сможем найти НОК (m, n):  $\text{НОК}(m, n): S = 23 \Rightarrow \text{НОК}(m, n) = 23 \cdot S = 23 \cdot 30 = 690 \text{ см}$

3) Число 690 разложим на простые множители:  $690 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23$ . Известно, что ширина ящика кратно 5 и 3. Значит, ящик может быть нескольких размеров: 1. 30х23 см, 2. 345х2 см и 3. 15х46 см. Но в условии задачи сказано, что размер коробки 5х6 см, значит длина прямоугольного дна равна 2 см.

Ответ: 2 см.

**Задача 6.** Лист картона имеет форму прямоугольника, длина которого 81 см, а ширина 40 см. Этот лист надо разрезать на равные прямоугольники размером 3х5.

**Какое наибольшее количество прямоугольников можно получить из этого листа?**

**Задача 7.** Сколько солдат маршируют на плацу размером 8х16 м, если они будут маршировать строем по 11 человек в шеренге и перестраиваться в колонну по 18 человек в шеренге?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовали задачу о покрытии заданного прямоугольника со сторонами  $m \times n$  маленькими плитками размером  $2 \times 3$ . В ходе вычислительного эксперимента была установлена связь между количеством плитками  $2 \times 3$  и размерами прямоугольника  $m \times n$  используя НОК и НОД, выявили закономерность между количеством плиток размером  $2 \times 3$  и сторонами прямоугольника  $m \times n$  используя НОК и НОД. А именно НОК  $(m, n)$  и количество плиток по рисунку совпадает в том случае, когда одна из сторон в прямоугольнике кратно 3. А НОК  $(m, n)$ , который получился не целым числом схож с количеством плиток на рисунке.

Проведя исследование можно сказать, что новый способ формирует у обучающихся вычислительные умения и навыки, расширяет кругозор и любознательность у них, также обучающиеся лучше умеют выявлять закономерности, свойства и использовать факты на практике.

### Список Литературы

1. Математика: 6 класс: учебник/А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир; под ред. В.Е.Подольского. – 4-е изд., доп. – М.: Вентана-Граф, 2019.
2. Википедия (свободная энциклопедия), <http://ru.wikipedia.org>

**Рецензия на исследовательскую работу по теме  
«Свойства НОД и НОК в задачах о покрытии прямоугольника плитками  
маленьких размеров»  
ученицы 7Б класса МБОУ СОШ № 18 г. Пензы  
Тиховой Ярославы**

Исследовательская работа посвящена актуальной теме применения знаний по решению задач на покрытие. Цель работы четко сформулирована и обоснована. План исследования включает в себя все необходимые этапы для достижения цели.

Исследовательская работа имеет логически правильную структуру. Она состоит из введения, теоретической части, практической части, заключения, а также списка использованной при написании исследовательской работы литературы и приложений. Работа грамотно оформлена. Она содержит большое количество материала, что позволяет более наглядно раскрыть ее основные результаты.

Тема работы полностью раскрыта, Ярослава демонстрирует знания, выходящие за рамки школьной программы. Девочка грамотно проанализировала большое количество литературы по заданной тематике.

Работа является исследовательской, поэтому способствует развитию познавательного интереса, аналитических способностей, различных способов восприятия и обработки информации.

В практической части Ярослава проводит собственное исследование, решая задачи на покрытие прямоугольника плитками маленьких размеров. Обобщив полученные результаты, девочка приходит к выводу, что интересно применить к этой теме свойства НОД и НОК чисел.

На протяжении всего периода работы над проектом у ученицы формировались необходимые предметные знания и умения, общеучебные умения и навыки, необходимые компетентности.

Данную работу можно использовать в качестве получения дополнительных знаний как на уроках алгебры, так и на уроках геометрии, прослеживается связь математических наук и практики.

Таким образом, можно заключить, что поставленные цели и задачи успешно раскрыты.

Дата: 25.12.2020г.

Рецензент:



Жистина Л.Ф., учитель математики

Подпись Жистиной Л.Ф. заверяю

Директор МБОУ СОШ № 18 г. Пензы



А.С. Кирсанов